УДК 517.929

НЕКОРРЕКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© П.Г. Сурков

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с запаздыванием; некорректная задача; асимптотические методы.

Для автономной линейной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием рассматривается задача Коши на отрицательной полуоси. Для ее решения используется метод регуляризации А.Н. Тихонова со стабилизирующим функционалом, не порождающим компактное множество в пространстве состояний. Получены асимптотические формулы для регуляризованных решений системы с запаздыванием на конечном отрезке отрицательной полуоси.

Рассматривается линейная автономная система дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bx(t-r), \quad t \in \mathbb{R}^- = (-\infty, 0], \tag{1}$$

где $x\colon \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^n$, $r>0$, A и B — постоянные $n\times n$ матрицы, $\det B \neq 0$.

Задача Коши на полуоси $(-r,\infty)$ является корректной, т. е. для начального момента $t_0=0$ и произвольной начальной функции $\varphi \in C = C\big([-r,0],\mathbb{R}^n\big)$ система (1) имеет единственное решение $x(\cdot,\varphi)$, непрерывно зависящее от начальной функции и совпадающее с ней на начальном отрезке $[-r,0]$. Для построения решения системы (1) на любом отрезке положительной полуоси можно использовать процедуру метода шагов [1].

Задача нахождения решений системы (1) на отрицательной полуоси является некорректной. Ее можно заменить обратной задачей построения решений в сторону возрастания времени [2]. Следуя методике работы [3], определяем пошаговую процедуру в сепарабельном гильбертовом пространстве $H = L_2\big([-r,0),\mathbb{R}^n\big)\times\mathbb{R}^n$ со скалярным произведением $(\varphi,\psi) = \psi^\top(0)\varphi(0) + \int_{-r}^{0}\psi^\top(s)\varphi(s)\,ds$, тогда получаем уравнения вида

$$Ux_k = x_{k+1}, \quad k \leqslant -1.$$

Здесь линейный оператор U определяется формулой

$$(Ux_{k+1})(t) = \exp\big(A(t+r)\big)x_k(0) + \int_{-r}^{t} \exp\big(A(t-s)\big)Bx_k(s)\,ds, \quad t\in[-r,0].$$

Последние задачи являются некорректными, и для их решения используется метод регуляризации А.Н. Тихонова [4]. Выбираем стабилизирующий функционал вида

$$\Omega[x] = x^\top(0)x(0) + \int_{-r}^{0} x^\top(s)x(s)\,ds, \quad x\in H,$$

В отличие от стабилизирующего функционала в работе [3] этот функционал не порождает компактное множество в H. Для фиксированного значения параметра регуляризации $\alpha>0$ будем искать элемент $x_\alpha \in H$, минимизирующий сглаживающий функционал

$$M^\alpha[\varphi,x] = \|Ux-\varphi\|_H + \alpha\Omega[x], \quad x\in H.$$

У т в е р ж д е н и е 1. *Пусть* $\det B \neq 0$. *Тогда минимизирующий элемент* x_α *определяется формулами*

$$x_\alpha(\theta) = \alpha^{-1}\bigl(z(\theta) - \psi(\theta)\bigr), \quad \theta \in [-r, 0),$$

$$x_\alpha(0) = \alpha^{-1} B^{-1\top}\bigl(z(-r) - \psi(-r)\bigr),$$

где функции ψ, χ *и* z *являются компонентами решения следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\begin{aligned} \alpha\chi' &= \alpha A\chi + B(z - \psi), \\ \psi' &= -(B^{-1}AB)^\top \psi - B^\top \chi, \\ z' &= -(B^{-1}AB)^\top z - B^\top \varphi(\theta) \end{aligned} \tag{2}$$

с краевыми условиями

$$\begin{gathered} \psi(-r) + \alpha B^\top \chi(-r) = z(-r)\psi(0) = B^\top \chi(0), \\ z(0) = B^\top \varphi(0). \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $\varphi \in H$, $\chi = Ux$, α *— малый положительный параметр.*

Решение системы (2), (3) находится с использованием асимптотических методов для обыкновенных дифференциальных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
2. *Долгий Ю.Ф., Путилова Е.Н.* Продолжение назад решений линейного дифференциального уравнения с запаздыванием как некорректная задача // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 8. С. 1317-1323.
3. *Долгий Ю.Ф., Сурков П.Г.* Асимптотика регуляризованных решений линейной автономной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием // Проблемы динамического управления: Сб. науч. тр. фак. ВМиК МГУ им. М.В Ломоносова. 2007. Вып. 2. С. 71-99.
4. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантом РФФИ (прокт № 13-01-00094), проектом УрО РАН (№ М-УрО-2013-2) и программой Президиума РАН «Математическая теория управления».

Surkov P.G. ILL-POSED PROBLEM FOR AUTONOMOUS SYSTEM WITH DELAY

The Cauchy problem on the negative half-line is considered for an autonomous linear system of differential equations with delay. The Tikhonov's regularization method is used for solving it. We choose a special stabilizing functional which do not generate a compact set in the space of states. Asymptotic formulas on the finite interval of the negative half-line for regularized solutions of the system with delay are obtained.

Key words: differential equations with delay; ill-posed problem; asymptotic methods.